1. DIFERENCIJALNA GEOMETRIJA

PREGLED TEORIJE

1.1. Vektorska funkcija $\vec{f}=\vec{f}(t)$ jednog skalarnog argumenta je preslikavanje koje svakom skalaru t iz nekog skupa D pridružuje određen vektor $\vec{f}(t)$. Skup D je područje definicije te funkcije.

Ako vektor $\vec{f}=\vec{f}(t)$ razložimo na komponente u smjeru koordinatnih vektora $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$,

$$\vec{f}=\vec{f}(t)=f_1(t)\vec{i}+f_2(t)\vec{j}+f_3(t)\vec{k}, \tag{1}$$

vidimo da je vektorska funkcija $\vec{f}=\vec{f}(t)$ zadana ako i samo ako su zadane tri skalarne funkcije

$$f_1=f_1(t),\ f_2=f_2(t),\ f_3=f_3(t). \tag{2}$$

1.2. Ako je vektorska funkcija (1) zadana u nekoj (polu)okolini tačke t_0 (u samoj tački t_0 ne mora biti definisana), tada se za vektor

$$\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$$

kaže da predstavlja graničnu vrijednost funkcije (1) kad $t\to t_0$ i piše se

$$\vec{a}=\lim_{t\to t_0}\vec{f}(t),$$

ako i samo ako za svako zadano $\varepsilon>0$ postoji $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ tako da vrijedi

$$|t-t_0|<\delta \Rightarrow |\vec{f}(t)-\vec{a}|<\varepsilon, \tag{4}$$

za svako t iz pomenute (polu)okoline, $t\neq t_0$.

Za funkciju (1) kaže se da je neprekidna u tački t_0 ako relacija (3) vrijedi za vektor $\vec{a}=\vec{f}(t_0)$.

Granična vrijednost (3) postoji ako i samo ako postoje granične vrijednosti

$$a_i=\lim_{t\to t_0} f_i(t) \quad (i=1, 2, 3), \tag{5}$$

a funkcija (1) je neprekidna u tački t_0 ako i samo ako su neprekidne funkcije (2) u toj istoj tački.

Za vektorsku funkciju (1) kaže se da je neprekidna na nekom skupu ukoliko je neprekidna u svakoj tački tog skupa.

Suma, skalarni i vektorski proizvod vektorskih funkcija neprekidnih u nekoj tački, odnosno na nekom skupu je opet neprekidna funkcija u toj tački, odnosno na tom skupu. Isto vrijedi za proizvod neprekidne skalarne i neprekidne vektorske funkcije, dakle, specijalno, za proizvod konstante i neprekidne vektorske funkcije. Naime vrijedi

$$\lim (\vec{f}(t) + \vec{g}(t)) = \lim \vec{f}(t) + \lim \vec{g}(t) \tag{6}$$

$$\lim (\vec{f}(t) \cdot \vec{g}(t) = (\lim \vec{f}(t)) \cdot (\lim \vec{g}(t)) \tag{7}$$

$$\lim (\vec{f}(t) \times \vec{g}(t)) = (\lim \vec{f}(t)) \times (\lim \vec{g}(t)) \tag{8}$$

$$\lim (\lambda(t) \cdot \vec{f}(t)) = (\lim \lambda(t)) \cdot (\lim \vec{f}(t)), \tag{9}$$

pri čemu smo svuda umjesto $\lim\limits_{t \to t_0}$ pisali kratko lim.

1.3. Ako za vektorsku funkciju (1) postoji $\lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{\vec{f}(t) - \vec{f}(t_0)}{t - t_0}$ tada se taj limes zove (prvi) izvod funkcije (1) i označava se sa $\vec{f}'(t_0)$. Dakle,

$$\vec{f}'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{\vec{f}(t) - \vec{f}(t_0)}{t - t_0}. \tag{10}$$

Funkcija (1) ima izvod u tački t_0 ako i samo ako u toj tački imaju izvod funkcije (2) i tada vrijedi

$$\vec{f}'(t_0) = f_1'(t_0)\vec{i} + f_2'(t_0)\vec{j} + f_3'(t)\vec{k}. \tag{11}$$

Za funkciju (1) kažemo da je diferencijabilna na nekom skupu ako ima izvod u svakoj tački tog skupa. Tada je izvod $\vec{f}'(t)$ vektorska funkcija definisana na tom skupu. Ta funkcija može biti neprekidna na tom skupu. U tom slučaju kaže se da je na tom skupu funkcija (1) neprekidno diferencijabilna.

Suma, skalarni i vektorski proizvod vektorskih funkcija diferencijabilnih na nekom skupu je opet vektorska funkcija diferencijabilna na tom skupu. Isto vrijedi za proizvod diferencijabilne skalarne i diferencijabilne vektorske funkcije, pa specijalno za proizvod skalara i diferencijabilne vektorske funkcije. Zapravo vrijedi

$$\begin{aligned}
&(\vec{f}(t) + \vec{g}(t))' = \vec{f}'(t) + \vec{g}'(t) \\
&(\vec{f}(t) \cdot \vec{g}(t))' = \vec{f}(t) \cdot \vec{g}'(t) + \vec{f}'(t) \cdot \vec{g}(t) \\
&(\vec{f}(t) \times \vec{g}(t))' = \vec{f}(t) \times \vec{g}'(t) + \vec{f}'(t) \times \vec{g}(t) \\
&(\lambda(t) \cdot \vec{f}(t))' = \lambda(t) \cdot \vec{f}'(t) + \lambda'(t) \cdot \vec{f}(t).
\end{aligned} \tag{12}$$

1.4. Ako je vektorska funkcija (1) diferencijabilna na nekom skupu, onda se može desiti da i funkcija $\vec{f}'(t)$ ima izvod $(\vec{f}'(t))'$ u nekoj tački t toga skupa. Tada se kaže da funkcija (1) ima u toj tački drugi izvod

$$\vec{f}''(t) = (f'(t))'. \tag{13}$$

To je slučaj ako i samo ako funkcije (2) imaju druge izvode u dotičnoj tački i vrijedi

$$\vec{f}''(t) = f_1''(t)\vec{i} + f_2''(t)\vec{j} + f_3''(t)\vec{k}. \tag{14}$$

Ako vektorska funkcija (1) ima drugi izvod u svakoj tački nekog skupa, onda se kaže da je ona dva puta diferencijabilna na tom skupu. Ukoliko je drugi izvod $\vec{f}''(t)$ neprekidna funkcija na nekom skupu, onda se kaže da je funkcija (1) na tom skupu dva puta neprekidno diferencijabilna.

Analogno se definišu pojmovi vezani za izvode višeg reda.

1.5. Diferencijal vektorske funkcije (1) definiše se ovako:

$$d\vec{f}(t) = \vec{f}'(t)\,dt.$$

Analogno se definišu diferencijali višeg reda.

1.6. Određeni integral $\vec{I}$ vektorske funkcije (1) na razmaku $[a, b]$ definiše se kao granična vrijednost integralne sume

$$\vec{\sigma}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{f}(t_i^*) \cdot (t_i - t_{i-1}), \tag{15}$$

pri čemu je $t_0 = a < t_1 < \cdots < t_n = b$ podjela razmaka $[a, b]$, dok je t_i^* neka tačka iz razmaka $[t_{i-1}, t_i]$. Granična vrijednost uzima se za $\max(t_i - t_{i-1}) \to 0$ i traži se da ona ne zavisi od podjele i izbora tačaka t_i^*. Preciznije, traži se da se za svako zadano $\varepsilon > 0$ može naći $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tako da za svaku podjelu i za svaki izbor tačaka t_i^* vrijedi

$$\max|t_i - t_{i-1}| < \delta \Rightarrow |\vec{I} - \vec{\sigma}_n| < \varepsilon. \tag{16}$$

Kad određeni integral $\vec{I}$ funkcije (1) na razmaku $[a, b]$ postoji, onda se kaže da je funkcija (1) integrabilna na $[a, b]$ i piše se

$$\vec{I} = \int_a^b \vec{f}(t)\,dt. \tag{17}$$

Integral (17) postoji ako i samo ako postoje integrali

$$I_k = \int_a^b f_k(t)\,dt \qquad (k = 1, 2, 3) \tag{18}$$

i tada vrijedi

$$\vec{I}=I_1\vec{i}+I_2\vec{j}+I_3\vec{k}. \tag{19}$$

Ako je funkcija (1) neprekidna na razmaku $[a, b]$, onda je ona na tom razmaku sigurno integrabilna.

Za funkcije $\vec{f}(t)$ i $\vec{g}(t)$ integrabilne na $[a, b]$ i za konstantu c, odnosno za konstantan vektor $\vec{c}$ vrijedi

$$\int_a^b (\vec{f}(t)+\vec{g}(t))\,dt=\int_a^b \vec{f}(t)\,dt+\int_a^b \vec{g}(t)\,dt;$$

$$\int_a^b c\cdot\vec{f}(t)\,dt=c\cdot\int_a^b \vec{f}(t)\,dt$$

$$\int_a^b \vec{c}\cdot\vec{f}(t)\,dt=\vec{c}\cdot\int_a^b \vec{f}(t)\,dt \tag{20}$$

$$\int_a^b \vec{c}\times\vec{f}(t)\,dt=\vec{c}\times\int_a^b \vec{f}(t)\,dt.$$

1.7. Vektorskoj funkciji (1) možemo pridružiti određen skup tačaka $T(x, y, z)$ ako $\vec{f}(t)$ interpretiramo kao vektor položaja

$$\vec{r}=\overrightarrow{OT}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k} \tag{21}$$

tačke T u odnosu na ishodište O koordinatnog sistema $Oxyz$.

Koordinate tačke T su funkcije parametra t:

$$x=x(t), \quad y=y(t), \quad z=z(t). \tag{22}$$

Uz određene pretpostavke o funkciji

$$\vec{r}=\vec{r}(t) \tag{23}$$

skup tačaka T za koje vrijedi (21) predstavlja neku krivu liniju C. Tada je (23) vektorska jednačina, a (22) su skalarne parametarske jednačine krive C.

Ako je oblast D definicije funkcije (23) neki interval $[a, b]$, a funkcija (1) neprekidno diferencijabilna na tom intervalu i pri tome vrijedi

$$\vec{r}'(t)\neq\vec{0}\ (\text{na } D), \tag{24}$$

tada kažemo da je kriva C glatka. Vektor (24) je tada vektor tangente na krivoj C u tački T koja odgovara vrijednosti parametra t.

Za krivu C kažemo da je po dijelovima glatka ako je sastavljena iz konačno mnogo glatkih komada.

1.8. Luk $\widehat{AT}$ po dijelovima glatke krive (23) ima dužinu

$$s=\int_a^t |\vec{r}'(t)|\,dt=\int_a^t \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt, \tag{25}$$

pri čemu je A tačka koja odgovara vrijednosti parametra $t=a$. Relecija (25) daje nam dužinu luka s krive (23) kao funkciju parametra t:

$$s=s(t). \tag{26}$$

Zbog

$$s'(t)=|\vec{r}'(t)|\neq 0$$

na svakom glatkom komadu krive (23) funkcija (26) ima inverznu funkciju

$$t=t(s) \tag{26'}$$

pa se zato jednačina (23) po dijelovima glatke krive može napisati u obliku

$$\vec{r}=\vec{r}(t(s)),$$

što ćemo kratko zapisati u obliku

$$\vec{r}=\vec{r}(s) \tag{23'}$$

iako je korektnije $\vec{r}=\vec{r}_1(s)$, jer je zavisnost od s drugačija.

1.9. Neka je sada kriva (23) ne samo po dijelovima glatka, nego neka funkcija $\vec{r}(t)$ ima izvode do uključivo trećeg reda. Tada je

$$\vec{t}=\vec{r}'(s) \tag{27}$$

jedinični vektor tangente na krivoj (23), odnosno (23'). Zbog toga je vektor

$$\vec{r}''(s)=\varkappa\vec{n} \tag{28}$$

ortogonalan na vektoru $\vec{t}$. Tu je $\vec{n}$ jedinični vektor glavne normale, a

$$\varkappa=|\vec{r}''(s)|=|\vec{r}'(s)\times\vec{r}''(s)| \tag{29}$$

zakrivljenost krive (23') u tački koja odgovara parametru s. Zbog ortogonalnosti jediničnih vektora $\vec{t}$ i $\vec{n}$ vektor binormale

$$\vec{b}=\vec{t}\times\vec{n} \tag{30}$$

je također jedinični vektor.

Triedar $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$ zove se prirodni triedar krive (23), odnosno (23'). On se mijenja od tačke do tačke krive. Tu promjenu opisuju Freneovi (Frenet) obrasci:

$$\frac{d\vec{t}}{ds}=\varkappa\vec{n};\quad \frac{d\vec{n}}{ds}=-\varkappa\vec{t}+\tau\vec{b};\quad \frac{d\vec{b}}{ds}=-\tau\vec{n}. \tag{31}$$

Pri tome je τ torzija krive (23') i računa se po formuli

$$\tau = \frac{(\vec{r}'(s), \vec{r}''(s), \vec{r}'''(s))}{|\vec{r}'(s) \times \vec{r}''(s)|^2} \tag{32}$$

1.10. U slučaju da t nije prirodni parametar s, vektor (24) je samo kolinearan sa vektorom $\vec{t}$, a vektor $\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)$ sa vektorom $\vec{r}'(s) \times \vec{r}''(s)$, dakle sa vektorom $\vec{b}$, dok je vektor $\vec{r}'(t) \times (\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t))$ kolinearan sa vektorom $\vec{n}$.

Za zakrivljenost umjesto (29) imamo sada

$$\varkappa = \frac{|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)|}{|\vec{r}'(t)|^3} \tag{29'}$$

a za torziju isti izraz kao u (32), samo što umjesto s dođe t.

1.11. Prava koja prolazi tačkom $\vec{r}(t)$ krive (23) a određena je vektorom $\vec{t}$, odnosno $\vec{n}$, odnosno $\vec{b}$ zove se tangenta, odnosno glavna normala, odnosno binormala krive (23) u dotičnoj tački i ima jednačinu

$$\vec{R} = \vec{R}(u) = \vec{r}(t) + u \cdot \vec{t}, \quad \text{tj.} \quad (\vec{R} - \vec{r}(t)) \times \vec{t} = 0, \tag{30_t}$$

odnosno

$$\vec{R} = \vec{R}(u) = \vec{r}(t) + u \cdot \vec{n}, \quad \text{tj.} \quad (\vec{R} - \vec{r}(t)) \times \vec{n} = 0, \tag{30_n}$$

odnosno

$$\vec{R} = \vec{R}(u) = \vec{r}(t) + u \cdot \vec{b}, \quad \text{tj.} \quad (\vec{R} - \vec{r}(t)) \times \vec{b} = 0. \tag{30_b}$$

1.12. Ravan koja prolazi tačkom $\vec{r}(t)$ krive (23) a normalna je na vektoru $\vec{t}$, odnosno $\vec{n}$, odnosno $\vec{b}$ zove se normalna, odnosno rektifikaciona, odnosno oskulaciona ravan krive (23) u dotičnoj tački i ima jednačinu

$$(\vec{R} - \vec{r}(t)) \cdot \vec{t} = 0, \tag{31_n}$$

odnosno

$$(\vec{R} - \vec{r}(t)) \cdot \vec{n} = 0, \tag{31_r}$$

odnosno

$$(\vec{R} - \vec{r}(t)) \cdot \vec{b} = 0. \tag{31_o}$$

1.13. Vektorska funkcija

$$\vec{F} = \vec{F}(u, v) \tag{33}$$

dvaju skalarnih argumenata je preslikavanje koje svakoj tački (u, v) nekog skupa D iz (u, v)-ravni pridružuje određen vektor $\vec{F}(u, v)$. Skup D je područje definicije funkcije (32). Ako vektor $\vec{F}$ razložimo na komponente u smjeru vektora $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

$$\vec{F} = F_1(u, v)\vec{i} + F_2(u, v)\vec{j} + F_3(u,v)\vec{k}, \tag{33'}$$

vidimo da je funkcija (32) zadana ako i samo ako su zadane tri skalarne funkcije

$$F_1 = F_1(u, v), \quad F_2 = F_2(u, v), \quad F_3 = F_3(u, v) \tag{34}$$

sa istim područjem definicije D.

1.14. Granična vrijednost i neprekidnost funkcije (33) definišu se isto kao i za funkciju (1), samo što se sada udaljenost dviju tačaka (u, v), (u_0, v_0) mjeri izrazom

$$\rho = \sqrt{(u-u_0)^2 + (v-v_0)^2} \tag{35}$$

i u vezi sa tim pod okolinom tačke (u_0, v_0) podrazumijeva svaki krug (u, v)-ravni sa centrom u toj tački.

Prema tome, relacija

$$\vec{A} = \lim \vec{F}(u, v) \quad ((u, v) \to (u_0, v_0)) \tag{35}$$

znači da za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta = \delta(\varepsilon)$ takvo da za vektor

$$\vec{A} = A_1 \vec{i} + A_2 \vec{j} + A_3 \vec{k} \tag{36}$$

vrijedi

$$0 < \rho < \delta \Rightarrow |\vec{F}(u, v) - \vec{A}| < \varepsilon. \tag{37}$$

Funkcija (33) je neprekidna u tački (u_0, v_0) ako (35) vrijedi za vektor

$$\vec{A} = \vec{F}(u_0, v_0). \tag{38}$$

Relacija (35) vrijedi za vektor (36) ako i samo ako vrijedi

$$A_i = \lim F_i(u, v) \quad ((u, v) \to (u_0, v_0)) \quad (i = 1, 2, 3) \tag{39}$$

dok je funkcija (33) neprekidna u tački (u_0, v_0) ako i samo ako su u toj tački neprekidne funkcije (34).

Sve ostalo što je rečeno u vezi sa neprekidnošću funkcija jednog skalarnog argumenta vrijedi i za vektorske funkcije dvaju skalarnih argumenata.

1.15. Za funkciju (33) kaže se da je diferencijabilna u tački (u_0, v_0) ako postoje vektor $\vec{A}$, vektor $\vec{B}$ i vektorska funkcija $\vec{C}(du, dv)$ definisana u nekoj okolini tačke (0, 0), tako da vrijedi

$$\Delta \vec{F}(u_0, v_0) = \vec{A} \cdot du + \vec{B} \cdot dv + \vec{C}(du, dv) \cdot \rho, \quad \lim_{\rho \to 0} \vec{C}(du, dv) = 0. \tag{40}$$

Pri tome je

$$\Delta \vec{F}(u_0, v_0) = \vec{F}(u, v) - \vec{F}(u_0, v_0) \tag{41}$$

$$du = u - u_0, \quad dv = v - v_0, \tag{42}$$

$$\rho = \sqrt{(u-u_0)^2 + (v-v_0)^2} = \sqrt{du^2 + dv^2}. \tag{43}$$

Kad su uslovi (40) ispunjeni, tada se izraz

$$d\vec{F}(u_0, v_0) = \vec{A} \cdot du + \vec{B} \cdot dv \tag{44}$$

zove (totalni) diferencijal funkcije (33) u tački (u_0, v_0). U tom slučaju vrijedi

$$\vec{A} = \lim_{u \to u_0} \frac{\vec{F}(u, v_0) - \vec{F}(u_0, v_0)}{u - u_0} = \vec{F}'_u(u_0, v_0), \tag{45}$$

odnosno

$$\vec{B} = \lim_{v \to v_0} \frac{\vec{F}(u_0, v) - \vec{F}(u_0, v_0)}{v - v_0} = \vec{F}'_v(u_0, v_0),$$

tj, vektor $\vec{A}$ predstavlja parcijalni izvod funkcije (33) po u, a vektor $\vec{B}$ parcijalni izvod te funkcije po v i to u tački (u_0, v_0). Iz (40) i (43) vidi se također da je svaka funkcija (33) koja je diferencijabilna u tački (u_0, v_0) neprekidna u toj tački.

1.16. Kako smo vidjeli, diferencijabilnost funkcije (33) u tački (u_0, v_0) povlači egzistenciju prvih parcijalnih izvoda funkcije (33) u toj tački. Taj potreban uslov za diferencijabilnost funkcije (33) u tački (u_0, v_0) nije i dovoljan. Međutim, dovoljno je da prvi parcijalni izvodi funkcije (33) postoje u nekoj okolini tačke (u_0, v_0) i da su neprekidni u toj tački. Tada ćemo reći da je funkcija (33) neprekidno diferencijabilna u tački (u_0, v_0).

Odmah se vidi da je funkcija (33) diferencijabilna u tački (u_0, v_0) ako i samo ako su u toj tački diferencijabilne funkcije (34). Sličan uslov vrijedi za egzistenciju parcijalninih izvoda funkcije (33), odnosno funkcija (34).

1.17. I funkciju (32) možemo interpretirati kao vektor položaja

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v) = x(u, v) \cdot \vec{i} + y(u, v) \cdot \vec{j} + z(u, v) \cdot \vec{k} \tag{46}$$

neke tačke $T(x, y, z)$ u pravouglom koordinatnom sistemu $Oxyz$. Tako je svakoj tački (u, v) iz oblasti D definicije funkcije (46) pridružena neka tačka T koja ima vektor položaja

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v) = \overrightarrow{OT}. \tag{47}$$

Koordinate tačke T, tj. komponente vektora $\vec{r}$ su funkcije od u i v

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v) \quad z = z(u, v). \tag{48}$$

Skup svih tačaka T koje su na ovaj način pridružene tačkama iz D uz određene pretpostavke o funkciji (46) predstavlja neku površ S. Relacija (46) je vektorska jednačina, a (48) su skalarne porametarske jednačine te površi.

1.18. Ako su

$$u = u(t), \quad v = v(t) \quad (u_0 = u(t_0), \quad v_0 = v(t_0)) \tag{49}$$

parametarske jednačine neke glatke krive koja leži u D, tada

$$\vec{r} = \vec{r}(u(t), v(t)) \tag{50}$$

predstavlja jednačinu neke krive koja leži na S. Iz (50) se, uz pretpostavku da je funkcija (46) diferencijabilna u tački (u_0, v_0), vidi da je

$$\vec{r}'(t_0) = \vec{r}'_u \cdot u'(t_0) + \vec{r}'_v \cdot v'(t_0) \neq \vec{0} \tag{51}$$

ukoliko su vektori $\vec{r}'_u(u_0, v_0)$ i $\vec{r}'_v(u_0, v_0)$ linearno nezavisni, tj. ukoliko je

$$\vec{r}'_u(u_0, v_0) \times \vec{r}'_v(u_0, v_0) \neq 0 \tag{52}$$

jer je kriva (49) glatka, pa je $u'(t_0) \neq 0$ ili $v'(t_0) \neq 0$. Osim toga iz (51) se vidi da vektor tangente na krivoj (50) u tački (u_0, v_0) ima smjer normalan na vektoru (52).

1.19. Za površ S zadanu jednačinom (46) reći ćemo da je glatka ako je D konačna oblast ograničena po dijelovima glatkim krivima, a funkcija (46) neprekidno diferencijabilna u svakoj unutrašnjoj tački oblasti D i u svakoj takvoj tački vrijedi (52).

Kako smo vidjeli, u slučaju glatke površi (46) svaka glatka kriva (49) u D koja prolazi unutrašnjom tačkom (u_0, v_0) preslikava se funkcijom (46) na neku krivu (50) koja leži na površi S, prolazi tačkom $T_0(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0))$ i u toj tački ima tangentu normalnu na vektoru (52). To znači, vektor (52) predstavlja vektor normale na površi S u tački T_0. Taj vektor nije obavezno jedinični.

Za površ S koja se sastoji iz konačno mnogo glatkih komada reći ćemo da je po dijelovima glatka.

1.20. Iz jednačina (48) površi S moguća je eliminacija parametara u i v. Ona vodi do veze

$$F(x, y, z) = 0 \tag{53}$$

koja također predstavlja jednačinu površi S. Ako je funkcija F diferencijabilna u nekoj tački $T_0(x_0, y_0, z_0)$ čije koordinate zadovoljavaju jednačinu 53, onda se u nekoj okolini tačke T_0 ona može riješiti po z, odnosno po x, odnosno po y, već prema tome da li je $F'_z \neq 0$, ili $F'_x \neq 0$ ili $F'_y \neq 0$ u dotičnoj tački. Tako se dobija respektivno

$$z = z(x, y), \text{ odnosno } x = x(y, z) \text{ odnosno } y = y(z, x)$$

kao eksplicitna jednačina komada površi S u okolini tačke T_0.

Pretpostavimo da je $F'_z \neq 0$ u promatranoj tački. Tada komad površi S u okolini tačke T_0 ima jednačinu

$$z = z(x, y). \tag{54}$$

Osim toga funkcija (54) diferencijabilna je u tački (x_0, y_0) i ima parcijalne izvode

$$z'_x = -F'_x/F'_z, \quad z'_y = -F'_y/F'_z \tag{55}$$

koji se dobiju iz (53) parcijalnim diferenciranjem po x odnosno po y.

Jednačina (54) je specijalan slučaj jednačina (48) i dobije se za $x=u$, $y=v$. Prema tome, komad (54) površi S, a time i sama površ S ima u tački T_0 vektor normale kolinearan sa vektorom

$$F_z' \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -F_x'/F_z' \\ 0 & 1 & -F_y'/F_z' \end{vmatrix} = F_x' \cdot \vec{i} + F_y' \cdot \vec{j} + F_z' \cdot \vec{k} = \operatorname{grad} F. \tag{56}$$

Zbog pretpostavke $F_z' \neq 0$ vektor (56) nije nulavektor. Do istog vektora normale (56) došlo bi se i u slučaju $F_x' \neq 0$, odnosno u slučaju $F_y' \neq 0$. Tako vidimo da jednačina oblika (53) predstavlja glatku površ ukoliko je funkcija $F(x, y, z)$ neprekidno diferencijabilna u svakoj tački površi i ako pri tome vrijedi

$$(\operatorname{grad} F)^2 = (F_x')^2 + (F_y')^2 + (F_z')^2 > 0 \quad (\text{na } S).$$

Tada vektor (56) predstavlja vektor normale na površi S u dotičnoj tački površi.

1.21. Neka je (46) glatka površ, a (50) neka glatka kriva na toj površi. Tada za element luka krive (50) imamo izraz

$$ds^2 = d\vec{r}^2 = (\vec{r}_u' \cdot u'(t) + \vec{r}_v' \cdot v'(t))^2 \, dt^2,$$

tj.

$$ds^2 = d\vec{r}^2 = (\vec{r}_u' \cdot \vec{r}_u') \cdot du^2 + 2 \cdot (\vec{r}_u' \cdot \vec{r}_v') \, du \cdot dv + (\vec{r}_v' \cdot \vec{r}_v') \, dv^2. \tag{57}$$

To je osnovna diferencijalna forma koja na površi S određuje metriku. Ta je metrika drugačija od one na (u, v)-ravni, gdje je

$$ds^2 = du^2 + dv^2.$$

1.22. Kriva linija može se dobiti kao presjek površi, pa zato ima i jednačine oblika

$$F(x, y, z) = 0, \quad G(x, y, z) = 0. \tag{58}$$

Pretpostavimo da su te površi glatke. Tada je u svakoj tački krive C koja ima jednačine (58) eventualni vektor tangente na krvoj C normalan na vektoru normale jedne i druge površi u toj istoj tački, dakle kolinearan sa vektorom

$$\operatorname{grad} F \times \operatorname{grad} G = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ F_x' & F_y' & F_z' \\ G_x' & G_y' & G_z' \end{vmatrix}. \tag{59}$$

Da bi nam vektor (59) odredio tangentu na krivoj C mora bar jedna od njegovih komponenata biti različita od nule, dakle, mora biti ispunjen uslov

$$\begin{vmatrix} F_y' & F_z' \\ G_y' & G_z' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} F_z' & F_x' \\ G_z' & G_x' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} F_x' & F_y' \\ G_x' & G_y' \end{vmatrix}^2 > 0. \tag{60}$$

To je ujedno uslov da se sistem jednačina (58) može u podesnoj okolini svake svoje tačke riješiti po dvjema od tri nepoznate x, y, z, koje u njemu figurišu. Svako takvo rješenje predstavlja jednačine nekog komada krive C u okolini posmatrane tačke i ima jedan od oblika

$$x = x(z), \quad y = y(z), \text{ odnosno } y = y(x), \quad z = z(x),$$

odnosno

$$x = x(y), \quad z = z(y). \tag{61}$$

To je samo specijalan slučaj jednačina oblika (22) kada ulogu parametra t preuzima jedna od koordinata x, y, z.

Primijetimo da se sistem (58) može zamijeniti (na primjer) sistemom

$$x = x(z), \quad y = y(z) \tag{62}$$

u okolini neke tačke krive C, ukoliko je $\vec{k}$ – komponenta vektora (59), a time i vektora tangente na krivoj C u toj tački različita od nule. Za sistem (22) jednačina krive C to znači da je $z'(t) \neq 0$, pa se u okolini te tačke može jednačina $z = z(t)$ riješiti po t, tj. napisati u obliku $t = t(z)$. Kad se $t = t(z)$ uvrsti u preostale dvije jednačine sistema (22), dobije se sistem oblika (62).

1.23. Ako se iz jedne od jednačina (58) krive C jedna od koordinata može izraziti preko preostale dvije, tada se zamjenom u onoj drugoj jednačini dobija jednačina koja ne sadrži dotičnu koordinatu. Zato ta jednačina predstavlja cilindričnu površ čije su izvodnice paralelne sa odgovarajućom koordinatnom osom, a njen presjek sa koordinatnom ravni, normalnoj na toj osi, predstavlja normalnu projekciju krive C na toj koordinatnoj ravni.

ZADACI

1. Data je kriva linija

$$\vec{r}=\vec{a}t^2+\vec{b}t+\vec{c} \quad (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ konstantni vektori}).$$

Pokazati da kriva leži u ravni, čiju jednačinu treba odrediti. Utvrditi o kojoj je krivoj riječ.

2. Kriva je određena kao presjek sfere $x^2+y^2+z^2=a^2$ i cilindra $x^2+y^2=ax$. Pokazati da je projekcija krive na Oxz – ravan dio parabole. Napisati jednačinu krive u parametarskom obliku.

3. Napisati parametarski oblik jednačine krive:

$$4\,ax=(y+z)^2 \quad 4\,x^2+3\,y^2=3\,z^2$$

i naći dužinu krive od tačke $O(0, 0, 0)$ do proizvoljne tačke krive.

4. Data je kriva $C:\vec{r}=(a\cos t,\ a\sin t,\ a\ln\cos t)$. Napisati jednačine te krive uvodeći kao argument luk s.

Rješenja:

1. a) Neka vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nisu kolinearni. Ako vektorsku jednačinu krive pomnožimo skalarno vektorom $\vec{a}\times\vec{b}$, dobićemo

$$\vec{r}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=(\vec{a}t^2+\vec{b}t+\vec{c})\cdot(\vec{a}\times\vec{b}),$$

odnosno

$$\vec{r}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}), \text{ tj. } (\vec{r}-\vec{c})\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=0,$$

dakle,

$$\begin{vmatrix} x-c_1 & y-c_1 & z-c_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}=0,$$

a to je jednačina ravni koja se traži.

Odredimo jedinične međusobno ortogonalne vektore $\vec{e}_1 = \vec{a}_0$ i $\vec{e}_2$ u ravni vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Tada je

$$\vec{r} - \vec{c} = t^2 a \vec{e}_1 + t (b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2) = (at^2 + b_1 t) \vec{e}_1 + b_2 t \vec{e}_2.$$

To znači da u koordinatnom sistemu $O'x'y'$ kome je ishodište u vrhu vektora $\vec{c}$, a koordinatne ose određene vektorima $\vec{e}_1$ i $\vec{e}_2$, jednačine krive glase:

$$x' = at^2 + b_1 t, \quad y' = b_2 t.$$

Kako je

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \left| \begin{vmatrix} a & b_1 \\ 0 & b_2 \end{vmatrix} \right| \neq 0,$$

mora biti $a b_2 \neq 0$, pa se može odrediti $t = \dfrac{y'}{b_2}$.

Dakle,

$$x' = \frac{a}{b_2^{\,2}} y'^2 + \frac{b_1}{b_2} y',$$

a to je jednačina parabole.

b) Ako su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kolinearni vektori, tada je

$$\vec{a} = \lambda \vec{b} \ (\vec{b} \neq \vec{0}) \ \text{ ili } \ \vec{b} = \vec{0},$$

pa je jednačina krive

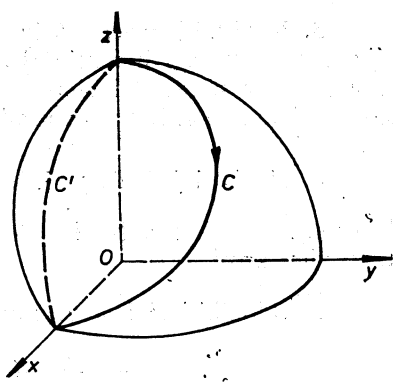
$$\vec{r} = (\lambda t^2 + t) \vec{b} + \vec{c} \ (\vec{b} \neq \vec{0}) \ \text{ ili } \ \vec{r} = t^2 \vec{a} + \vec{c}.$$

U prvom slučaju imamo jednačinu poluprave (za $\lambda \neq 0$), odnosno prave (za $\lambda = 0$), a u drugom jednačinu poluprave.

2. Projekciju C' krive C na Oxz-ravan dobićemo kad iz jednačina krive C eliminišemo y. Dobija se:

$$C' : ax + z^2 = a^2 \quad (0 \leqslant x \leqslant a),$$

a to je dio parabole (slika 1).



Sl. 1

Iz

$$x^2 + y^2 = ax, \text{ tj. } \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$$

nameće se smjena

$$x = \frac{a}{2}(1 + \cos t) = a \cos^2 \frac{t}{2},$$

$$y = \frac{a}{2} \sin t = a \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}.$$

Na osnovu toga dobija se

$$z^2 = a^2 - x^2 - y^2 = a^2 \sin^2 \frac{t}{2}, \quad \text{tj.} \quad z = a \sin \frac{t}{2}.$$

Parametarske jednačine krive C su, dakle,

$$x = a \cos^2 t, \quad y = a \sin t \cos t, \quad z = a \sin t \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$$

$\left(\text{ako umjesto } \frac{t}{2} \text{ pišemo } t\right)$.

3. Jednačina $4ax = (y+z)^2$ sugeriše smjenu $x = at^2$. Nakon toga je

$$y + z = 2at,$$

dok se iz

$$4x^2 + 3y^2 = 3z^2$$

dobija

$$3(y-z)\cdot(y+z) = 4a^2t^4, \text{ tj.}$$

$$y - z = \frac{2}{3}at^3.$$

Prema tome,

$$x = at^2, \quad y = a\left(t + \frac{1}{3}t^3\right), \quad z = a\left(t - \frac{1}{3}t^3\right) \quad (-\infty < t < +\infty).$$

Konačno se dobija $s = a\sqrt{2}\,z$.

4. $\vec{r} = a \cdot \left(\frac{1}{\operatorname{ch}\frac{s}{a}} \operatorname{th}\frac{s}{a}, \; -a \ln \operatorname{ch}\frac{s}{a}\right)$.

5. Napisati jednačinu krive $\vec{r} = (a\cos t, a\sin t, bt)$ izrazivši $\vec{r}$ kao funkciju argumenta s. Diferenciranjem po luku s naći jedinične vektore tangente, glavne normale i binormale krive u proizvoljnoj tački. Izračunati krivinu i torziju krive u proizvoljnoj tački.

6. Napisati jednačinu krive $\vec{r} = \left(t - \sin t, \; 1 - \cos t, \; 4\sin\frac{t}{2}\right)$ uvodeći kao parametar luk s. Naći jedinične vektore tangente i glavne normale, te krivinu krive.

7. Odrediti jedinične vektore tangente, glavne normale i binormale krive

$$x = e^t \cos t, \quad y = e^t \sin t, \quad z = e^t.$$

Zatim naći krivinu i torziju date krive.

8. Pokazati da tangente krive $x^2 = 3y$, $2xy = 9z$ zatvaraju stalan ugao sa jednim konstantnim pravcem. Naći taj pravac i taj ugao.

9. Napisati jednačinu skupa tačaka u kojima tangente zavojnice $\vec{r}=(a\cos t,\ a\sin t,\ bt)$ prodiru ravan $z=0$. Odrediti zakrivljenost dobijene krive.

Rješenja:

5. Kako je
$$ds=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,dt,\quad \text{tj.}\quad s=\sqrt{a^2+b^2}\,t,$$
imamo
$$\vec{r}=\left(a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}}\right).$$

Jedinični vektor tangente:
$$\vec{t}=\frac{d\vec{r}}{ds}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(-a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ b\right).$$
Iz
$$\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}=\frac{d\vec{t}}{ds}=\frac{1}{a^2+b^2}\left(-a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad -a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ 0\right)$$
dobija se jedinični vektor glavne normale:
$$\vec{n}=\frac{\dfrac{d^2\vec{r}}{ds^2}}{\left|\dfrac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right|}=\left(-\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad -\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ 0\right).$$

Jedinični vektor binormale:
$$\vec{b}=\vec{t}\times\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -a\sin\dfrac{s}{a^2+b^2} & a\cos\dfrac{s}{a^2+b^2} & b\\ -\cos\dfrac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} & -\sin\dfrac{s}{a^2+b^2} & 0\end{vmatrix},\ \text{tj.}$$
$$\vec{b}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(b\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad -b\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ a\right).$$

Kako je krivina $\varkappa=\left|\dfrac{d\vec{t}}{ds}\right|=\left|\dfrac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right|$, to je $\varkappa=\dfrac{a}{a^2+b^2}$. Torzija τ krive dobija se iz $\dfrac{d\vec{b}}{ds}=-\tau\cdot\vec{n}$, pa je, zbog

$$\frac{d\vec{b}}{ds}=\frac{1}{a^2+b^2}\left(b\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ b\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad 0\right)=-\frac{b}{a^2+b^2}\vec{n},$$

$$\tau=-\frac{b}{a^2+b^2}.$$

6. $t=\frac{s}{2};\ \vec{t}=\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{s}{2},\ \sin\frac{s}{2},\ 2\cos\frac{s}{4}\right)$

$$\vec{n}=\frac{1}{4\varkappa}\left(\sin\frac{s}{2},\ \cos\frac{s}{2},\ -\sin\frac{s}{4}\right);\qquad \varkappa=\frac{\sqrt{1+\sin^2\frac{s}{4}}}{4}.$$

7. $\vec{t}=\frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}=\frac{1}{\sqrt{3}}[(\cos t-\sin t)\vec{i}+(\cos t+\sin t)\vec{j}+\vec{k}];$

$$\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{2}}[(-\sin t-\cos t)\vec{i}+(\cos t-\sin t)\vec{j}];$$

$$\vec{b}=\frac{1}{\sqrt{6}}[(\sin t-\cos t)\vec{i}-(\sin t+\cos t)\vec{j}+2\vec{k}];$$

$$\varkappa=\frac{2}{3e^t};\quad \tau=-\frac{1}{3e^t}.$$

8. Jednačina krive u vektorskom obliku je $\vec{r}=\left(t,\ \frac{t^2}{3},\ \frac{2}{27}t^3\right)$. Odatle je

$$\frac{d\vec{r}}{dt}=\left(1,\ \frac{2}{3}t,\ \frac{2}{9}t^2\right).$$

Jedinični vektor tangente je $\vec{t}=\frac{(9,\ 6t,\ 2t^2)}{9+2t^2}$.

Neka je $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$ jedinični vektor traženog pravca. Biće $\vec{t}\cdot\vec{a}=\text{const.}$, tj.

$$9a_1+6a_2t+2a_3t^2=c\cdot(9+2t^2),$$

odnosno

$$(2a_3-2c)t^2+6a_2t+9(a_1-c)=0.$$

Ova jednakost biće identički po t zadovoljena ako i samo ako je

$$a_1=c,\ \ a_2=0,\ \ a_3=c.$$

Koristeći još i uslov $|\vec{a}|=1$, dobija se $c=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, a zatim $\vec{a}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, a traženi ugao $\theta=\frac{\pi}{4}$.

9. Vektorska jednačina tangente na zavojnicu u proizvoljnoj tački $M(t)$ je

$$\vec{R}=\vec{r}(t)+u\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}, \tag{1}$$

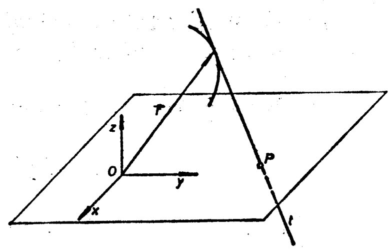
odnosno

$$\vec{R}=(a\cos t-au\sin t,\ \ a\sin t+au\cos t,\ \ bt+ub), \tag{2}$$

pri čemu je u tekuća koordinata za tačke tangente.

Prodor P tangente (2) sa ravni $z=0$ (sl. 2) dobija se za $bt+ub=0$, tj. za $u=-t$.

Dakle, koordinate tačke prodora P su $a\cos t+at\sin t$, $a\sin t-at\cos t$, 0.



Sl. 2

Tražena kriva ima jednačine

$$x=a\cos t+at\sin t,\ \ y=a\sin t-at\cos t,\ \ z=0,\ \ (-\infty<t<+\infty).$$

Krivina krive koju obrazuju tačke P je

$$\varkappa=\frac{a(6+t^2)}{(4+t^2)^{3/2}}.$$

10. Naći jednačinu tangente i normalne ravni, binormale i oskulatorne ravni, glavne normale i rektifikacione ravni krive $\vec{r}=(t^3-t^2-5,\ 3t^2+1,\ 2t^3-16)$ u tački $t=2$.

11. Data je kriva $x=\frac{1}{2}\sin^2 t$, $y=\frac{1}{2}(t+\sin t\cos t)$, $z=\sin t$.

a) Odrediti jednačine tangente, binormale i glavne normale u proizvoljnoj tački.

b) Dokazati da svaka od pravih pod a) zaklapa sa z-osom konstantan ugao.

c) Odrediti jednačine normalne, oskulatorne i rektifikacione ravni u proizvoljnoj tački.

12. Data je kriva $\vec{r}=x\vec{i}+x^n\vec{j}+z(x)\vec{k}$.

Odrediti $z(x)$ tako da oskulatorna ravan krive u svakoj tački prolazi kroz projekciju te tačke na y-osu.

13. Data je kriva $\vec{r}=a\cos t\,\vec{i}+a\sin t\,\vec{j}+az(t)\vec{k}$.

a) Napisati jednačinu tangente i oskulatorne ravni u proizvoljnoj tački krive.

b) Odrediti $z(t)$ tako da kriva prolazi tačkama $(a,\ 0,\ a)$ i da njene tangente prodiru ravan xOy u tačkama kružnice $x^2+y^2=R^2$.

c) Odrediti $z(t)$ tako da oskulatorna ravan zaklapa sa z-osom konstantan ugao θ.

14. Odrediti funkciju $\varphi(u)$ u jednačini krive $\vec{r}=(a(\cos u+\sin u), a(\sin u-\cos u), \varphi(u))$ tako da oskulatorna ravan u svakoj tački krive zaklapa sa z-osom ugao $\frac{\pi}{4}$.

15. Odrediti $z(x)$ u jednačini krive $\vec{r}=(x, e^x, z(x))$ tako da oskulatorna ravan u svakoj tački $A(x, y, z)$ te krive prolazi tačkom $B(2x, 2y, 2z)$.

16. Naći jednačinu tangente krive

$$x+3y^2-6z=0$$

$$x^2-2y+z^2=9$$

u tački $(3, 1, 1)$.

17. Na krivoj

$$x^2+y^2-z^2-2y+4z=4$$

$$x+y+2z=9$$

naći tačku u kojoj aplikata ima najveću vrijednost. U toj tački odrediti jednačinu normalne ravni.

18. Kriva ima kao projekciju na xOy-ravni sinusoidu $y=\sin x$. Odrediti $z(x)$ u jednačini krive da bi glavna normala krive bila paralelna sa xOz-ravni i da tangenta krive u tački $A(0, 0, 1)$ bude paralelna sa xOy-ravni.

Rješenja:

10. Tačku na krivoj ćemo dobiti kad uvrstimo u jednačinu krive $t=2$; biće $A(-1, 13, 0)$.

Nađimo $\frac{d\vec{r}}{dt}$ i $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ u datoj tački.

$$\frac{d\vec{r}}{dt}=(3t^2-2t,\ 6t,\ 6t^2),\ \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_A=(8,\ 12,\ 24);$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=(6t-2,\ 6,\ 12t),\quad \left(\frac{\vec{r}}{dt^2}\right)_A=(10,\ 6,\ 24).$$

Tada je vektor tangente

$$\vec{t}_A=4(2\vec{i}+3\vec{j}+6\vec{k}),$$

a vektor binormale

$$\vec{b}_A = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = 4 \cdot 2 \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 6 \\ 5 & 3 & 12 \end{vmatrix} = 8\,(18\,\vec{i} + 6\,\vec{j} - 9\,\vec{k}),$$

tj.

$$\vec{b}_A = 24\,(6\,\vec{i} + 2\,\vec{j} - 3\,\vec{k}).$$

Vektor normale biće

$$\vec{n}_A = \vec{b}_A \times \vec{t}_A = 96 \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 96\,(21\,\vec{i} - 42\,\vec{j} + 14\,\vec{k}),$$

tj.

$$\vec{n}_A = 96 \cdot 7\,(3\,\vec{i} - 6\,\vec{j} + 2\,\vec{k}).$$

Kako za jednačine osa prirodnog triedra ne igraju ulogu intenziteti već samo pravac vektora triedra, to ćemo uzeti da je

$$\vec{t}_A = 2\,\vec{i} + 3\,\vec{j} + 6\,\vec{k}$$

$$\vec{b}_A = 6\,\vec{i} + 2\,\vec{j} - 3\,\vec{k}$$

$$\vec{n}_A = 3\,\vec{i} - 6\,\vec{j} + 2\,\vec{k},$$

pa će biti:

a) jednačina tangente

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-13}{3} = \frac{z-0}{6},$$

a jednačina normalne ravni

$$2\,(x+1) + 3\,(y-13) + 6\,(z-0) = 0,$$

odnosno

$$2\,x + 3\,y + 6\,z = 37;$$

b) jednačina binormale

$$\frac{x+1}{6} = \frac{y-13}{2} = \frac{z}{-3},$$

a jednačina oskulatorne ravni

$$6\,(x+1) + 2\,(y-13) - 3\,z = 0,$$

odnosno

$$6\,x + 2\,y - 3\,z = 20;$$

c) jednačina glavne normale

$$\frac{x+1}{3}=\frac{y-13}{-6}=\frac{z}{2},$$

a jednačina rektifikacione ravni

$$3(x+1)-6(y-13)+2z=0,$$

odnosno

$$3x-6y+2z=-81.$$

11. Imamo

$$\vec{r}=\left(\frac{1}{2}\sin^2 t,\ \frac{1}{2}(t+\sin t\cos t),\quad \sin t\right)$$

$$\dot{\vec{r}}=\left(\sin t\cos t,\ \frac{1}{2}(1+\cos^2 t-\sin^2 t),\ \cos t\right)$$

$$\ddot{\vec{r}}=(\cos 2t,\ -\sin 2t,\ -\sin t).$$

Zato možemo uzeti

$$\vec{t}=(\sin t,\ \cos t,\ 1).$$

Kako je $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \sin t & \text{sos}\, t & 1 \\ \cos 2t & -\sin 2t & -\sin t \end{vmatrix}=\sin t\cos t\,\vec{i}+\cos^2 t\,\vec{j}-\cos t\,\vec{k},$

možemo uzeti

$$\vec{b}=(\sin t,\ \cos t,-1).$$

Iz

$$\vec{b}\times\vec{t}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \sin t & \cos t & -1 \\ \sin t & \cos t & 1 \end{vmatrix}=2\cos t\,\vec{i}-2\sin t\,\vec{j}$$

dobijamo:

$$\vec{n}=(\cos t,\ -\sin t,0).$$

a) $$t\equiv\frac{x-\frac{1}{2}\sin^2 t}{\sin t}=\frac{y-\frac{1}{2}(t+\sin t\ \cos t)}{\cos t}=\frac{z-\sin t}{1}$$

$$b\equiv\frac{x-\frac{1}{2}\sin^2 t}{\sin t}=\frac{y-\frac{1}{2}(t+\sin t\ \cos t)}{\cos t}=\frac{z-\sin t}{-1}$$

$$n\equiv\frac{x-\frac{1}{2}\sin^2 t}{\cos t}=\frac{y-\frac{1}{2}(t+\sin t\ \cos t)}{-\sin t}=\frac{z-\sin t}{0}$$

b) $$\cos\gamma_t=\frac{1}{\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}},\ \text{tj.}\quad \gamma_t=\frac{\pi}{4}$$

$$\cos\gamma_b=\frac{-1}{\sqrt{2}},\ \text{tj.}\quad \gamma_b=\frac{3\pi}{4}$$

$$\cos\gamma_n=0,\ \text{tj.}\quad \gamma_n=\frac{\pi}{2}$$

c) Normalna ravan:

$$\sin t\left(X-\frac{1}{2}\sin^2 t\right)+\cos t\left[Y-\frac{1}{2}(t+\sin t\cos t)\right]+(Z-\sin t)=0,$$

tj.

$$\sin t\ X+\cos t\ Y+Z=\frac{1}{2}(3\sin\ t+t\ \cos t).$$

Oskulatorna ravan:

$$\sin t\left(X-\frac{1}{2}\sin^2 t\right)+\cos t\left[Y-\frac{1}{2}(t+\sin t\ \cos t)\right]-(Z-\sin t)=0,$$

tj.

$$\sin t\ X+\cos t\ Y-Z=\frac{1}{2}(-\sin\ t+t\ \cos t).$$

Rektifikaciona ravan:

$$\cos t\left(X-\frac{1}{2}\sin^2 t\right)-\sin t\left[Y-\frac{1}{2}(t+\sin t\ \cos t)\right]=0,$$

tj.

$$\cos t\ X-\sin t\ Y=-\frac{1}{2}t\ \sin t.$$

12. Tačka na krivoj biće $A(x, x^n, z(x))$, a projekcija tačke A na y-osu biće $A'(0, x^n, 0)$.

Jednačina oskulatorne ravni je

$$(\vec{R}-\vec{r}_A)\cdot(\dot{\vec{r}}_A\times\ddot{\vec{r}}_A)=0,$$

tj.

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-x^n & Z-z(x) \\ 1 & nx^{n-1} & z' \\ 0 & n(n-1)x^{n-2} & z'' \end{vmatrix}=0.$$

Koordinate tačke A′ (0, x^n, 0) zadovoljavaju jednačinu oskulatorne ravni, pa će biti

$$\begin{vmatrix} 0-x & x^n-x^n & 0-z \\ 1 & nx^{n-1} & z' \\ 0 & n(n-1)x^{n-2} & z'' \end{vmatrix}=0,$$

tj.

$$z''(-nx^n)-z'(-n(n-1)x^{n-1})-z(n(n-1)x^{n-2})=0.$$

Nakon dijeljenja sa $-nx^{n-2}$ dobija se

$$x^2 z'' - (n-1)\, xz' + (n-1)\, z = 0.$$

Ovo je Ojlerova diferencijalna jednačina, pa ako stavimo $z = x^r$, $z' = rx^{r-1}$, $z'' = r(r-1)\, x^{r-2}$, dobićemo $r^2 - nr + n - 1 = 0$, odakle je $r_1 = 1$, $r_2 = n-1$.

Prema tome,

$$z(x) = C_1 x + C_2 x^{n-1}, \quad (n \neq 2),$$

$$z(x) = C_1 x + C_2 x \ln x, \quad (n = 2).$$

13. a) Jednačina tangente je

$$\frac{x - a\cos t}{-\sin t} = \frac{y - a\sin t}{\cos t} = \frac{z - az(t)}{z'}.$$

Jednačina oskulatorne ravni je

$$\begin{vmatrix} X - a\cos t & Y - a\sin t & Z - az(t) \\ -\sin t & \cos t & z' \\ -\cos t & -\sin t & z'' \end{vmatrix} = 0,$$

tj.

$$(\cos t z'' + \sin t z')\, X - Y(-\sin t z'' + \cos t z') + Z = a(z'' + z).$$

b) Tačka $A(a, 0, a)$ leži na krivoj, pa iz $az(0) = a$ slijedi $z(0) = 1$. Prodor tangente kroz ravan xOy ima koordinate:

$$Z = 0$$

$$X = a\frac{z}{z'}, \ \sin t + \cos t$$

$$Y = -a\frac{z}{z'}, \ \cos t + a \sin t.$$

Iz uslova

$$R^2 = X^2 + Y^2 = a^2 \frac{z^2}{z'^2} + a^2$$

dobija se

$$\frac{z^2}{z'^2} = \frac{R^2 - a^2}{a^2},$$

tj.

$$\frac{z'}{z} = \pm\sqrt{\frac{a^2}{R^2 - a^2}},$$

dakle,

$$\ln|z| = \pm\sqrt{\frac{a^2}{R^2 - a^2}}\, t + \ln|C|.$$

Znači,

$$z = Ce^{kt}, \quad k = \pm\sqrt{\frac{a^2}{R^2 - a^2}}.$$

No imali smo

$$z=a, \quad \text{za } t=0, \quad \text{pa je } a=C, \quad \text{tj. } z=ae^{kt}.$$

c) Ugao između ravni i z-ose je komplement ugla između normale te ravni i z-ose, dakle,

$$\sin\theta=\frac{\vec{b}\cdot\vec{k}}{|\vec{b}|},$$

$$\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{(\cos tz''+z'\sin t)^2+(\sin tz''-\cos tz')^2+1}},$$

$$\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{z''^2+z'^2+1}}$$

$$z''^2+z'^2+1=\frac{1}{\sin^2\theta}$$

$$z''^2+z'^2=\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$$

$$z''=\pm\sqrt{\operatorname{ctg}^2\theta-z'^2}$$

$$\operatorname{arc}\ \sin\frac{z'}{\operatorname{ctg}\theta}=\pm t+C_1$$

$$z'=\operatorname{ctg}\theta\cdot\sin(\pm t+C_1)$$

$$z=\mp\operatorname{ctg}\theta\cdot\cos(\pm t+C_1)+C_2.$$

14. $\varphi(u)=\pm\sqrt{2a}\,\cos(u+C_1)+C_2.$

15. $z=C_1x+C_2e^x.$

16. $\dfrac{x-3}{0}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{1}.$

17. $(-5,\ -4,\ 9),\quad x-y+1=0.$

18. $z_1=-\cos x+2,\quad z_2=\cos x.$

19. Pokazati da kriva

$$x=\frac{t}{1+t^2+t^4},\quad y=\frac{t^2}{1+t^2+t^4},\quad z=\frac{t^3}{1+t^2+t^4}$$

leži na sferi čiju jednačinu treba odrediti.

Odrediti jednačinu normalne, oskulatorne, rektifikacione ravni krive i tangentne ravni sfere u tački $t=1$.

20. Pokazati da kriva $r(t)=\sin 2t\,\vec{i}+(1-\cos 2t)\vec{j}+2\cos t\,\vec{k}$ leži na sferi čiju jednačinu treba odrediti.

Naći jednačinu normalne ravni krive i jednačinu tangentne ravni sfere na kojoj kriva leži i to u tački $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, 1\right)$.

Rješenja:

19. Ako jednačine krive kvadriramo, dobićemo

$$x^2+y^2+z^2=\frac{t^2}{1+t^2+t^4},$$

tj.

$$x^2+y^2+z^2=y.$$

Znači, kriva leži na sferi

$$x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+z^2=\frac{1}{4}.$$

Da nađemo jednačine traženih ravni krive trebaju nam izvodi. Napisaćemo jednačine krive u obliku:

$$x=\frac{t}{1+t^2+t^4}, \ y=tx, \ z=t^2 x.$$

Tada je

$$x(1)=\frac{1}{3}, \ y(1)=\frac{1}{3}, \ z(1)=\frac{1}{3},$$

$$\dot{x}=\frac{1-t^2-3t^4}{(1+t^2+t^4)^2}, \ \dot{x}(1)=-\frac{1}{3}$$

$$\ddot{x}=\frac{-6t-18t^3+6t^5+12t^7}{(1+t^2+t^4)^3}, \quad \ddot{x}(1)=-\frac{2}{9}$$

$$\dot{y}=x+t\dot{x}, \qquad \vec{\dot{y}}(1)=0$$

$$\ddot{y}=2\dot{x}+t\ddot{x}, \qquad \vec{\ddot{y}}(1)=-\frac{8}{9}$$

$$\dot{z}=2tx+t^2\dot{x}, \qquad \dot{z}(1)=\frac{1}{3}$$

$$\ddot{z}=2x+4t\dot{x}+t^2\ddot{x}, \quad \ddot{z}(1)=-\frac{8}{9}.$$

Za $t=1$ vektor tangente, binormale i normale biće:

$$\vec{t}(1)=\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{t=1}=\left(-\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}\right),$$

$$\vec{b}(1)=\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\times\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)_{t=1}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3}\\ -\frac{2}{9} & -\frac{8}{9} & -\frac{8}{9}\end{vmatrix}=\left(\frac{8}{27},\quad -\frac{-10}{27},\quad -\frac{8}{27}\right),$$

$$\vec{n}(1)=(\vec{b}\times\vec{t})_{t=1}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{8}{27} & \frac{-10}{27} & \frac{8}{27}\\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3}\end{vmatrix}=\left(-\frac{10}{81},\quad -\frac{16}{81},\quad -\frac{10}{81}\right).$$

Jednačina normalne ravni krive biće:

$$(\vec{R}-\vec{r})\,\vec{t}=0,$$

tj.

$$-1\left(X-\frac{1}{3}\right)+0\left(Y-\frac{1}{3}\right)+1\left(Z-\frac{1}{3}\right)=0,$$

dakle,

$$-X+Z=0.$$

Jednačina oskulatorne ravni krive biće:

$$8\left(X-\frac{1}{3}\right)-10\left(Y-\frac{1}{3}\right)+8\left(Z-\frac{1}{3}\right)=0,$$

odnosno

$$8X-10Y+8Z-2=0.$$

Jednačina rektifikacione ravni je:

$$-10\left(X-\frac{1}{3}\right)-16\left(Y-\frac{1}{3}\right)-10\left(Z-\frac{1}{3}\right)=0,$$

tj.

$$-10X-16Y-10Z+12=0.$$

Jednačina tangentne ravni sfere S u tački $A\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)$ je

$$(\text{grad } S)_A\,(\vec{R}-\vec{r})=0.$$

Kako je

$$\text{grad } S=2x\vec{i}+2\left(y-\frac{1}{2}\right)\vec{j}+2z\vec{k},$$

odnosno

$$(\text{grad } S)_A=\frac{2}{3}\vec{i}-\frac{1}{3}\vec{j}+\frac{2}{3}\vec{k},$$

tražena jednačina će biti

$$2\left(X-\frac{1}{3}\right)-\left(Y-\frac{1}{3}\right)+2\left(Z-\frac{1}{3}\right)=0,$$

tj.

$$2X-Y+2Z-1=0.$$

20. Sfera: $x^2+y^2+z^2=4$.

Norm. ravan: $X-3Y+3Z=0$

Tang. ravan: $3X+3Y+2Z=8$.

21. Dokazati da kriva $\vec{r}=a\operatorname{ch}t\cos t\,\vec{i}+a\operatorname{ch}t\sin t\,\vec{j}+at\,\vec{k}$ leži na površi $x^2+y^2=a^2\operatorname{ch}^2\dfrac{z}{a}$ i da se oskulatorna ravan krive poklapa sa tangentom ravni površi u svakoj tački krive.

22. Data je površ $4x^2-y^2-4z=0$. Kriva C je skup tačaka na datoj površi u kojima tangentne ravni površi prolaze tačkom (0, 2, 0).

Naći jednačine krive C i jednačine tangente te krive u proizvoljnoj tački.

23. Odrediti funkciju $g(t)$ u jednačini krive $\vec{r}=b\cos t\,\vec{i}+b\sin t\,\vec{j}+g(t)\,\vec{k}$ tako da kriva leži na površi $\vec{r}=u\,\vec{i}+v\,\vec{j}+\operatorname{arc\,tg}\dfrac{v}{u}\,\vec{k}$. Zatim pokazati da se u svakoj tački te krive oskulatorna ravan krive i tangentna ravan te površi poklapaju.

24. Odrediti $f(t)$ tako da oskulatorna ravan krive $\vec{r}=(a\cos t,\ a\sin t,\ af(t))$ gradi sa z-osom stalan ugao.

Rješenja:

21. Dovoljno je pokazati da koordinate tačaka krive zadovoljavaju jednačinu površi i da su vektor binormale krive i vektor normale površi kolinearni. Uvrstimo u jednačinu površi koordinate tačaka krive; dobijamo:

$$a^2\operatorname{ch}^2 t\cos^2 t+a^2\operatorname{ch}^2 t\sin^2 t=a^2\operatorname{ch}^2\frac{at}{a},\ \text{tj.}\ a^2\operatorname{ch}^2 t=a^2\operatorname{ch}^2 t.$$

Vektor normale površi biće

$$\vec{N}_p=\frac{\partial F}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial F}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial F}{\partial z}\vec{k}=2x\,\vec{i}+2y\,\vec{j}-2a\operatorname{ch}\frac{z}{a}\operatorname{sh}\frac{z}{a}\,k,$$

tj. u tačkama krive

$$\vec{N}_p=2a\operatorname{ch}t\cos t\,\vec{i}+2a\operatorname{ch}t\sin t\,\vec{j}-2a\operatorname{ch}t\operatorname{sh}t\,\vec{k}.$$

Vektor binormale krive biće

$$\vec{b}=\frac{d\vec{r}}{dt}\times\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=a^2\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \operatorname{sh} t\cos t-\operatorname{ch} t\sin t & \operatorname{sh} t\sin t+\operatorname{ch} t\cos t & 1\\ -2\operatorname{sh} t\sin t & 2\operatorname{sh} t\cos t & 0\end{vmatrix}$$

tj.

$$\vec{b}=2a^2\operatorname{sh} t\,(-\cos t\,\vec{i}-\sin t\,\vec{j}+\operatorname{sh} t\,\vec{k}),\ \text{ pa je } \vec{b}=a\frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t}\vec{N}_p.$$

Znači da se, u svakoj tački krive, oskulatorna ravan krive i tangentna ravan površi poklapaju.

22. Tangentna ravan u proizvoljnoj tački površi ima jednačinu

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial F}{\partial y}(Y-y)+\frac{\partial F}{\partial z}(Z-z)=0.$$

Za našu površ biće

$$8x(X-x)-2y(Y-y)-4(Z-z)=0.$$

Ta ravan mora da prolazi tačkom (0, 2, 0), pa će biti

$$8x(0-x)-2y(2-y)-4(0-z)=0.$$

Proizvoljna tačka (x, y, z) u kojoj smo postavili tangentnu ravan mora, dakle, da zadovoljava uslove:

$$4x^2-y^2-4z=0,\quad -8x^2-4y+2y^2+4z=0.$$

To su jednačine tražene krive linije.

Predstavimo tu krivu parametarski. Ako saberemo obje njene jednačine, dobićemo jednačinu $-4x^2-4y+y^2=0$, koja skupa sa jednačinom date površi predstavlja krivu C:

$$-4x^2-4y+y^2=0,\ 4x^2-y^2-4z=0.$$

Jednačinu $(y-2)^2-4x^2=4$ možemo pisati u obliku $\dfrac{(y-2)}{4}-x^2=1.$

To sugeriše parametrizaciju:

$$x=\operatorname{sh} t,\ y=2\pm 2\operatorname{ch} t.$$

Na osnovu toga se dobija $z=-2\mp 2\operatorname{ch} t$.

Prema tome, parametarske jednačine krive biće:

$$x=\operatorname{sh} t,\ y=2(1\pm\operatorname{ch} t),\ z=-2(1\pm\operatorname{ch} t).$$

Jednačine tangente glase:

$$\frac{X-\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t}=\frac{Y-2(1 \pm \operatorname{ch} t)}{\pm 2 \operatorname{sh} t}=\frac{Z+2(1 \pm \operatorname{ch} t)}{\mp 2 \operatorname{sh} t}.$$

23. $g(t)=t, \quad \vec{b}=b \cos t \vec{N}.$

24. Oskulatorna ravan je određena vektorom binormale, pa se funkcija $f(t)$ određuje iz uslova

$$\vec{b} \cdot \vec{k}=C=\text{const.} \ (-1 \leqslant C \leqslant 1). \tag{1}$$

Pravac binormale određen je vektorom (M, N, P), pri čemu je

$$M=y' z''-y'' z', \ N=z' x''-z'' x', \ P=x' y''-x'' y'.$$

Zato je

$$\vec{b}=\frac{M \vec{i}+N \vec{j}+P \vec{k}}{\sqrt{M^2+N^2+P^2}}. \tag{2}$$

Za datu krivu je

$$M=a^2(f'' \cos t+f' \sin t), \ N=a^2(f'' \sin t-f' \cos t), \ P=a^2. \tag{3}$$

Na osnovu (2) i (3) uslov (1) postaje

$$\frac{1}{\sqrt{1+f'^2+f''^2}}=C, \text{ tj. } f''^2+f'^2=C_1^2 \qquad (C_1 \in R). \tag{4}$$

Stavljajući $f'(t)=p(t)$, dobija se jednačina

$$p'^2(t)+p^2=C_1^2. \tag{5}$$

Razdvajanjem promjenljivih iz (5) se dobija

$$\arcsin \frac{p}{C_1}=C_2 \pm t, \ (C_2 \in R). \tag{6}$$

Iz (6) slijedi

$$p=C_1 \sin(C_2 \pm t),$$

i zatim

$$f'(t)=C_1 \sin(C_2 \pm t). \tag{7}$$

Integracijom iz (7) se dobija

$$f(t)=C_3 \mp C_1 \cos(C_2 \pm t), \ (C_3 \in R), \tag{8}$$

što se može napisati u obliku

$$f(t)=C_1 \cos(t+C_2)+C_3, \tag{9}$$

s obzirom na to da su C_1, C_2 i C_3 proizvoljne konstante, a cosinus parna funkcija.

Naći radijus krivine krive u proizvoljnoj tački:

25. $x=\sin z-z \cos z, \ y=\cos z+z \sin z.$

26. $x=e^t,\ y=e^{-t},\ z=\sqrt{2}\,t.$

Odrediti krivinu krive:

27. $x=\ln\cos t,\ y=\ln\sin t,\ z=\sqrt{2}\,t$ u proizvoljnoj tački.

28. $x^2+y^2-z^2=0,\ z=x+2y-1$ u tački $(0,\ 1,\ 1)$.

Izračunati torziju krive u proizvoljnoj tački:

29. $r=a(1-\cos t,\ \sin 2t,\ 2\cos t)$.

30. $x=3t-t^3,\ y=3t^2,\ z=3t+t^3$.

31. Pokazati da je za krivu $\vec{r}=(e^t\cos t,\ e^t\sin t,\ e^t)$ odnos krivine i torzije konstantan u svim tačkama krive.

32. Naći torziju krive $x^2+2y+2z=1,\ x+y^2-z=1$ u tački $(1,\ 0,\ 0)$.

33. Ispitati skup krivih za koje je odnos torzije i krivine konstantan.

Rješenja:

25. Krivina je data izrazom $\varkappa=\dfrac{\left|\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}\right|}{\left|\dot{\vec{r}}\right|^3}$, a poluprečnik krivine je $R=\dfrac{1}{\varkappa}$.

Ovdje ćemo uzeti da je z parametar, pa je

$$\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ z\sin z & z\cos z & 1\\ \sin z+z\cos z & \cos z-z\sin & 0\end{vmatrix}=(z\sin z-\cos z)\cdot\vec{i}+(z\cos z+\sin z)\vec{j}-z^2\vec{k}.$$

$$\varkappa=\frac{\sqrt{1+z^2+z^4}}{\sqrt{z^2+1}};\quad R=\frac{\sqrt{z^2+1}}{\sqrt{z^4+z^2+1}}.$$

26. $R=\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}$. **27.** $\varkappa=\dfrac{\sin 2t}{\sqrt{2}}$. **28.** $\varkappa=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

29. Torzija krive data je izrazom $\tau=\dfrac{\left[\dot{\vec{r}},\ \ddot{\vec{r}},\ \dddot{\vec{r}}\right]}{\left|\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}\right|^2}$.

Kako je

$$\left[\dot{\vec{r}},\ \ddot{\vec{r}},\ \dddot{\vec{r}}\right]=a^3\begin{vmatrix}\sin t & 2\cos 2t & -2\sin t\\ \cos t & -4\sin 2t & -2\cos t\\ -\sin t & -8\cos 2t & 2\sin t\end{vmatrix}=0,$$

to je torzija $\tau=0$.

Ako je torzija $\tau=0$ u svakoj tački krive, onda kriva leži u ravni. Ta ravan u ovom slučaju ima jednačinu: $Ax+By+Cz+D=0$.

Pri tome je, zbog

$$(A+D)+(2C-A)\cos t+B\sin 2t=0\ (\forall t),$$

$$A+D=0,\ 2C-A=0,\ B=0,\ \text{tj. } D=-A,\ C=\frac{A}{2},\ B=0.$$

30. $\tau=\dfrac{6}{(t^2+1)^2}$. **31.** $\varkappa:\tau=\sqrt{2}$. **32.** $\tau=\dfrac{108}{194}$.

33. Ako je data kriva $\vec{r}=\vec{r}(s)$, tada je

$$\frac{d\vec{t}}{ds}=\varkappa\vec{n},\quad \frac{d\vec{b}}{ds}=-\tau\vec{n}. \tag{1}$$

Iz (1) slijedi $\dfrac{d\vec{b}}{ds}+\dfrac{\tau}{\varkappa}\dfrac{d\vec{t}}{ds}=0$, odnosno, za krive koje treba ispitati,

$$\frac{d\vec{b}}{ds}+C\frac{d\vec{t}}{ds}=0,\quad C=\frac{\tau}{\varkappa}=\text{const.} \tag{2}$$

Integracijom, iz (2) se dobija

$$\vec{b}+C\vec{t}=\vec{a},\quad \vec{a}=\text{const.} \tag{3}$$

Kako je $\vec{t}\perp\vec{b}$, to je $|\vec{a}|=\sqrt{1+C^2}$.

Skalarnim množenjem jednakosti (3) vektorom $\vec{t}$ dobija se

$$C=\vec{a}\cdot\vec{t}=\sqrt{1+C^2}\cdot\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{t}),$$

a odatle

$$\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{t})=\frac{C}{\sqrt{1+C^2}}. \tag{4}$$

Dakle, tangente krive $\vec{r}=\vec{r}(s)$ grade konstantan ugao sa pravcem vektora $\vec{a}$. Skalarnim množenjem jednakosti (3) vektorom $\vec{b}$ izvodi se zaključak: binormale krive $\vec{r}=\vec{r}(s)$ grade konstantan ugao sa pravcem vektora $\vec{a}$.

Iz $\vec{n}=\vec{b}\times\vec{t}$ na osnovu (3) slijedi

$$\vec{n}=(\vec{a}-C\vec{t})\times\vec{t}=\vec{a}\times\vec{t},$$

što znači da su normale krive $\vec{r}=\vec{r}(s)$ ortogonalne na vektoru $\vec{a}$.

Ako se izabere koordinatni sistem tako da se smjer vektora $\vec{a}$ poklapa sa z-osom, onda na osnovu (4) slijedi

$$\frac{dz}{ds} = \frac{C}{\sqrt{1+C^2}}, \quad \text{tj.} \quad z = \frac{C}{\sqrt{1+C^2}} s + C_1. \tag{5}$$

Koordinate x i y tačaka tražene krive mogu se zadati u obliku

$$x = f(s), \quad y = g(s), \tag{6}$$

pri čemu su $f(s)$, $g(s)$ proizvoljne (tri puta) diferencijabilne funkcije za koje je

$$(f'(s))^2 + (g'(s))^2 + \frac{C^2}{1+C^2} = 1.$$

Tražene krive imaju, dakle, parametarske jednačine (5) i (6) uz uslov (7).

34. Vektor položaja pokretne tačke dat je kao funkcija luka s:

$$\vec{r} = s\vec{a} + \vec{a} \times \vec{A}(s),$$

gdje je $\vec{a}$ konstantan vektor $|\vec{a}| < 1$, a $\vec{A}(s)$ diferencijabilna vektorska funkcija. Dokazati da je odnos krivine i torzije konstantan.

35. Naći vektor $\vec{A}(s)$ koji zadovoljava uslove

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \vec{A} \times \vec{t}, \qquad \frac{d\vec{n}}{ds} = \vec{A} \times \vec{n},$$

gdje je s luk krive $\vec{r} = r(s)$ a $\vec{t}$, $\vec{n}$, $\vec{b}$ ort tangente, normale i binormale te krive, respektivno.

36. Data je kriva $\vec{r} = \vec{r}(s)$. Razložiti vektor $\dfrac{d^3\vec{r}}{ds^3}$ po pravcima ortova prirodnog triedra.

37. Razložiti vektor ubrzanja $\vec{a}$ pokretne tačke po pravcima osa prirodnog triedra trajektorije $\vec{r} = \vec{r}(t)$ (t vrijeme).

38. Na binormali krive $\vec{r} = \vec{r}(s)$ konstantne torzije nalazi se odsječak date dužine l čiji je jedan kraj na krivoj. Drugi kraj odsječka opisuje krivu $\vec{R} = \vec{R}(s)$ kad se s mijenja.

Razložiti vektor binormale krive $\vec{R} = \vec{R}(s)$ po pravcima ortova prirodnog triedra date krive.

Odrediti ugao između binormala krivih koje odgovaraju određenom s.

39. Napisati Freneove obrasce za krivu $\vec{r} = a\cos t\,\vec{i} + a\sin t\,\vec{j} + bt\vec{k}$.

40. Kriva C je presjek paraboloida $z = x^2 + y^2$ i ravni $y = z$.

a) Naći ortove prirodnog triedra krive;

b) Naći tačke krive u kojima je krivina $\varkappa = 2\sqrt{2}$.

c) Napisati Freneove obrasce u tački krive nađenoj pod b).

Rješenja:

34. Iz

$$\vec{t} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{a} + \vec{a} \times \frac{d\vec{A}}{ds},$$

$$\varkappa\vec{n} = \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \vec{a} \times \frac{d^2\vec{A}}{ds^2},$$

slijedi $\vec{t}\cdot\vec{a} = a^2$, $\vec{n}\cdot\vec{a} = 0$. Znači, $\vec{a}$ leži u ravni određenoj vektorima $\vec{b}$ i $\vec{t}$, pa je

$$\beta = \sphericalangle(\vec{b}, \vec{a}) = \frac{\pi}{2} - \sphericalangle(\vec{t}, \vec{a}) = \frac{\pi}{2} - \alpha.$$

Ako diferenciramo jednakost $\vec{n}\cdot\vec{a} = 0$ i primijenimo Freneove obrasce, dobićemo

$$(-\varkappa\vec{t} + \tau\vec{b})\cdot\vec{a} = 0, \text{ odnosno}$$

$$\frac{\varkappa}{\tau} = \frac{\vec{b}\cdot\vec{a}}{\vec{t}\cdot\vec{a}}.$$

Kako je

$$\vec{t}\cdot\vec{a} = a^2, \text{ to je}$$
$$1\cdot a\cos\alpha = a^2, \text{ tj.}$$
$$\cos\alpha = a.$$

Zato iz

$$\vec{b}\cdot\vec{a} = 1\cdot a\cos\beta = a\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = a\sqrt{1-a^2}$$

slijedi

$$\frac{\varkappa}{\tau} = \frac{a\sqrt{1-a^2}}{a^2}, \text{ tj.}$$

$$\frac{\varkappa}{\tau} = \frac{\sqrt{1-a^2}}{a}.$$

35. Vektor $A(s)$ možemo razložiti u pravcima vektora $\vec{t}$, $\vec{n}$ i $\vec{b}$:

$$\vec{A}(s) = \alpha\vec{t} + \beta\vec{n} + \gamma\vec{b}.$$

Ako primijenimo Freneove obrasce iz uslova zadatka dobijamo:

$$\varkappa \vec{n} = (\alpha \vec{t} + \beta \vec{n} + \gamma \vec{b}) \times \vec{t}$$

$$-\varkappa \vec{t} + \tau \vec{b} = (\alpha \vec{t} + \beta \vec{n} + \gamma \vec{b}) \times \vec{n},$$

dakle,

$$\varkappa \vec{n} = -\beta \vec{b} + \gamma \vec{n} \Rightarrow \beta = 0, \quad \gamma = \varkappa;$$

$$-\varkappa \vec{t} + \tau \vec{b} = \alpha \vec{b} - \gamma \vec{t} \Rightarrow \alpha = \tau, \quad \gamma = \varkappa.$$

Znači: $\vec{A}(s) = \tau \vec{t} + \varkappa \vec{b}$.

36. Kako je $\dfrac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \varkappa \vec{n}$, gdje je $\varkappa$ krivina, to je

$$\frac{d^3\vec{r}}{ds^3} = \frac{d\varkappa}{ds}\vec{n} + \varkappa \frac{d\vec{n}}{ds}.$$

Koristimo Freneove obrasce, pa će biti

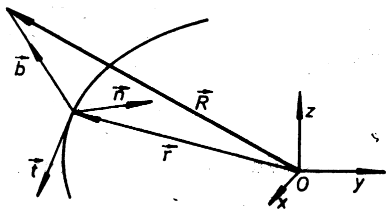
$$\frac{d^3\vec{r}}{ds^3} = \frac{d\varkappa}{ds}\vec{n} + \varkappa(-\varkappa \vec{t} + \tau \vec{b}),$$

$$\frac{d^3\vec{r}}{ds^3} = -\varkappa^2 \vec{t} + \frac{d\varkappa}{ds}\vec{n} + \varkappa\tau \vec{b}.$$

37. $$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{t} + \frac{v^2(t)}{R}\vec{n} \quad (\vec{v} = v(t)\vec{t}).$$

38. Vektor položaja drugog kraja duži (sl. 3) biće

$$\vec{R} = \vec{r}(s) + l\vec{b}(s).$$



Sl. 3

Za krivu $\vec{R} = \vec{R}(s)$ s ne mora biti dužina luka, pa njen vektor binormale $\vec{b}_1 = \dot{\vec{R}} \times \ddot{\vec{R}}$, nije obavezno jedinični.

Primjenjujući Freneove obrasce i vodeći računa o tome da je $\tau = \text{const.}$ dobijamo:

$$\vec{R} = \vec{r}(s) + l\vec{b},$$

$$\dot{\vec{R}} = \vec{t} + l(-\tau \vec{n}),$$

$$\ddot{\vec{R}} = \varkappa \vec{n} - l\tau(-\varkappa \vec{t} + \tau \vec{b}).$$

Biće, znači,

$$\vec{b}_1=(\vec{t}-l\tau\vec{n})\times(\varkappa l\tau\vec{t}+\varkappa\vec{n}-l\tau^2\vec{b}),\ \text{tj.}$$

$$\vec{b}_1=l^2\tau^3\vec{t}+\varkappa(1+l^2\tau^2)\vec{b}+l\tau^2\vec{n}.$$

Time smo $\vec{b}_1$ razložili na komponente u smjeru vektora $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$. Ugao između binormala biće:

$$\cos\varphi=\frac{\vec{b}_1\cdot\vec{b}}{|\vec{b}_1|\cdot 1}=\frac{\varkappa(1+l^2\tau^2)}{\sqrt{(l^2\tau^3)^2+\varkappa^2(1+l^2\tau^2)^2+(l\tau^2)^2}}=$$

$$=\frac{\varkappa\sqrt{1+l^2\tau^2}}{\sqrt{l^2\tau^2+\varkappa^2(1+l^2\tau^2)}}.$$

$$\left(\text{Može i ovako: } \operatorname{tg}\varphi=\frac{|\vec{b}_1\times\vec{b}|}{\vec{b}_1\cdot\vec{b}}=\frac{|-l^2\tau^3\vec{n}+l\tau^2\vec{t}|}{\varkappa(1+l^2\tau^2)}=\frac{l\tau^2}{\varkappa\sqrt{1+l^2\tau^2}}\right).$$

39.

$$\frac{d\vec{t}}{ds}=\frac{a}{a^2+b^2}\vec{n},$$

$$\frac{d\vec{n}}{ds}=-\frac{a}{a^2+b^2}\vec{t}+\frac{b}{a^2+b^2}\vec{b},$$

$$\frac{d\vec{b}}{ds}=-\frac{b}{a^2+b^2}\vec{n}.$$

40. Krivu C napišimo u parametarskom obliku. Iz

$$z=y$$
$$y=x^2+y^2,$$

tj. iz

$$z=y$$

$$x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

imamo

$$x=\frac{1}{2}\cos t,\qquad y=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin t,\qquad z=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin t.$$

Nađimo vektore tangente, binormale i glavne normale. Kako je

$$\vec{r}=\frac{1}{2}(\cos t\,\vec{i}+(1+\sin t)\vec{j}+(1+\sin t)\vec{k}),$$

$$\dot{\vec{r}}=\frac{1}{2}(-\sin t\,\vec{i}+\cos t\,\vec{j}+\cos t\,\vec{k}),$$

$$\ddot{\vec{r}}=\frac{1}{2}(-\cos t\,\vec{i}-\sin t\,\vec{j}-\sin t\,\vec{k}),$$

imamo

$$\vec{t}=\dot{\vec{r}}=\frac{1}{2}(-\sin t\,\vec{i}+\cos t\,\vec{j}+\cos t\,\vec{k}),$$

$$\vec{b}=\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}=\frac{1}{4}(-\vec{j}+\vec{k}),$$

$$\vec{n}=\vec{b}\times\vec{t}=\frac{1}{8}(-2\cos t\,\vec{i}-\sin t\,\vec{j}-\sin t\,\vec{k}).$$

Ortovi prirodnog triedra su:

$$\vec{t}_0=\frac{1}{\sqrt{1+\cos^2 t}}(-\sin t\,\vec{i}+\cos t\,\vec{j}+\cos t\,\vec{k}),$$

$$\vec{b}_0=\frac{1}{\sqrt{2}}(-\vec{j}+\vec{k}),$$

$$\vec{n}_0=\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1+\cos^2 t}}(-2\cos t\,\vec{i}-\sin t\,\vec{j}-\sin t\,\vec{k}).$$

b) Krivina $\varkappa$ krive data je sa

$$\varkappa=\frac{|\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}|}{|\dot{\vec{r}}|^3}.$$

Kako je $|\dot{\vec{r}}|=\frac{1}{2}\sqrt{1+\cos^2 t}$, a

$|\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}|=\frac{1}{4}\sqrt{2}$, to je

$$\varkappa=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{(1+\cos^2 t)^3}}.$$

Imamo da je $\varkappa=2\sqrt{2}$, pa će biti

$$2\sqrt{2}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{(1+\cos^2 t)^3}},\ \text{tj.}$$

$$\sqrt{(1+\cos^2 t)^3}=1,$$

što daje

$$\cos^2 t=0,$$

dakle,

$$t=\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=0,\quad y=1,\quad z=1:$$

$$t=\frac{3\pi}{2}\Rightarrow x=0,\quad y=0,\quad z=0.$$

Prema tome, postoje dvije tačke na krivoj (C) u kojima je krivina $\varkappa = 2\sqrt{2}$: A (0, 1, 1) i B (0, 0, 0).

c) Imamo da je torzija

$$|\tau| = \left|\frac{d\vec{b}}{ds}\right|.$$

Kako je $\dfrac{d\vec{b}}{ds} = \dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{-\vec{j}+\vec{k}}{\sqrt{2}}\right) = \vec{0}$,

to je torzija $\tau = 0$, pa će Freneovi obrasci za tačku A glasiti:

$$\left(\frac{d\vec{t}}{ds}\right)_A = \varkappa_A \vec{n}_A = 2\sqrt{2}\left(\frac{-\vec{j}-\vec{k}}{\sqrt{2}}\right);$$

$$\left(\frac{d\vec{n}}{ds}\right)_A = -\varkappa_A \vec{t}_A + \tau_A \vec{b}_A = -2\sqrt{2}\,(-\vec{i}) = 2\sqrt{2}\,\vec{i};$$

$$\left(\frac{d\vec{b}}{ds}\right)_A = \vec{0}.$$

U tački B biće:

$$\left(\frac{d\vec{t}}{ds}\right)_B = 2\,(\vec{j}+\vec{k});$$

$$\left(\frac{d\vec{n}}{ds}\right)_B = -2\sqrt{2}\,\vec{i};$$

$$\left(\frac{d\vec{b}}{ds}\right)_B = \vec{0}.$$

(Napomena: Moglo se odmah uočiti da je torzija $\tau = 0$, jer kriva leži u ravni $y = z$).